Procesarea Semnalelor

Laboratorul 4.

Transformata Fourier - Partea II

1 Reprezentarea timp-frecvență

Până acum ați lucrat cu reprezentarea semnalelor în timp: ați afișat grafic variația valorilor acestora la diferite momente de timp. În prelucrarea semnalelor este adesea mai utilă analiza componentelor de frecvență prezente într-un semnal. Multe dintre semnalele reale conțin mai multe componente de frecvență. Gândiți-vă, spre exemplu, la un semnal audio: o melodie. Auziți simultan mai multe instrumente muzicale, cât și vocea interpretului. Fiecare instrument poate emite sunete într-un anumit interval de frecvențe (gândiți-vă la diferențele între sunetul unei tobe și al unei trompete). Prin urmare, în melodie există toate componentele de frecvență pe care le emit instrumentele pe măsură ce sunt cântate.

O reprezentare grafică utilă (nu doar pentru semnale audio!) este spectrograma, cum este cea din Figura 1. Spectrograma este o reprezentare timp-frecvență: axa orizontală reprezintă axa timpului, iar cea verticală a frecvențelor. Intensitatea culorilor (sau nuanța de gri) a fiecărui punct de pe spectrogramă sugerează puterea respectivei componente de frecvență la acel moment de timp. Diferite sunete au ”pattern-uri” diferite timp-frecvență[1].

Un alt motiv pentru care semnalele reale conțin mai multe componente de frecvență este faptul că acestea sunt afectate de zgomot. În cursurile/laboratoarele următoare veți afla mai multe detalii despre definiția, tipurile de zgomot și sursele acestuia. Pentru moment, revedeți slideul din Cursul 4 unde o sinusoidă este afectată de zgomot. Cum este, în acest caz, frecvența sinusoidei față de frecvența zgomotului?

În mod evident, o sinusoidă sintentică simplă va avea o singură componentă de frecvență, anume frecvența fundamentală a acesteia. Un semnal obținut din suma a două sau mai multe sinusoide de frecvențe diferite va avea două sau mai multe componente de frecvență, fiecare corespunzând termenilor din sumă.

[1] Formația Aphex Twin a speculat reprezentarea vizuală a spectrogramei pentru a include un anumit timp de informație într-una din melodiile sale (https://mixmag.net/feature/spectrogram-art-music-aphex-twin).

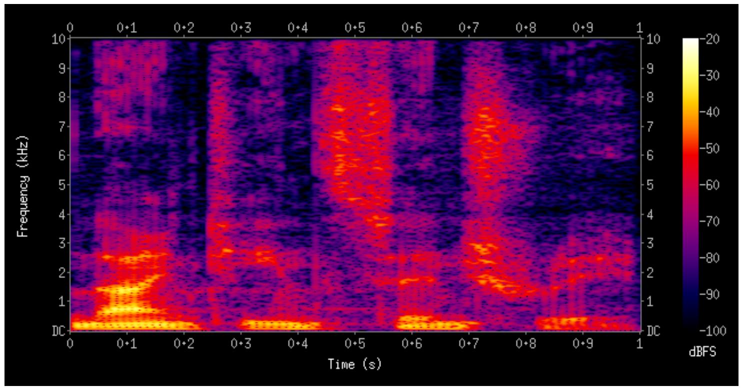

Figure 1: Spectrograma unui semnal audio

2 Decibelul

Puterea unui semnal este exprimată ca pătratul magnitudinii $P = \sum_{n=1}^{N} |x[n]|^2$. Decibelul măsoară puterea unui semnal în raport cu o putere de referință, în scară logaritmică

$$R_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0} \mathrm{dB}. \tag{1}$$

Definirea puterii în termeni relativi la o referință vine din istoria unității de măsură în domeniul telecomunicațiilor, unde este necesară transmiterea unui semnal pe distanțe lungi fără pierderea calității acestuia. Similar puterii, alte proprietăți ale unui semnal pot fi exprimate în dB: amplitudinea, energia. Nivelul de intensitate a sunetului se măsoară de asemenea în dB, unde intensitatea de referință este limita percepției umane, $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

O altă utilizare frecventă a unității de măsură o reprezintă caracterizarea unui semnal achizionat sau a unui canal de comunicație din perspectiva prezenței zgomotului. Raportul semnal-zgomot este definit ca raportul de putere

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{\mathrm{semnal}}}{P_{\mathrm{zgomot}}}. \tag{2}$$

Reprezentat în dB, raportul devine $\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \mathrm{SNR}$.

3 Teorema de eșantionare Nyquist-Shannon

Semnale limitate în bandă

Semnalele ale căror componente de frecvență sunt 0 sau, mai general, nesemnificative, în afara unui interval $[-B(\mathrm{Hz}), B(\mathrm{Hz})]$ se numesc semnale trece-bandă (band-pass). Dacă, în plus, frecvențele sunt centrate în jurul lui 0Hz, se numesc semnale trece-jos (low-pass). Limitarea la bandă implică existența unei frecvențe maxime, B Hz între componentele de frecvență ale semnalului. În practică se face des presupunerea că semnalele utilizate sunt limitate în bandă: fie pentru că sunt într-adevăr așa, fie pentru că anumite componente de frecvență sunt irelevante pentru aplicație, însă principalul motiv este acela că doar pentru astfel de semnale putem stabili o regulă după care acestea să fie eșantionate.

Frecvența Nyquist

Multe din semnalele reale sunt continue, în timp ce pentru a putea fi prelucrate acestea trebuie să fie discretizate. Teorema de eșantionare Nyquist-Shannon stabilește frecvența minimă cu care un semnal trebuie eșantionat astfel încât informația conținută în semnalul original (continuu) să poată fi reconstruită întocmai.

Teorema se aplică pentru semnale limitate în bandă și stabilește o relație între frecvența minimă de eșantionare, f_s și frecvența maximă conținută în semnal, B, anume: pentru a nu avea pierderi de informație, un semnal trebuie eșantionat cu $f_s > 2B$. Reciproc, dacă un semnal este eșantionat cu f_s oarecare, nu se poate garanta reconstrucția sa exactă decât pentru componentele de frecvență $f < f_s/2$.

Pentru a înțelege de ce componentele de frecvență dintr-un semnal (în particular frecvența maximă) influențează frecvența cu care acestea trebuie eșantionate, observăm fenomenul de aliere.

Fenomenul de aliere (aliasing)

Fie un semnal semnal sinusoidal discret

$$x[n] = a\cos(\omega n + \phi) = a\cos(2\pi f n + \phi), \tag{3}$$

unde ω reprezintă frecvența unghiulară a semnalului, iar ϕ faza acestuia.

Un astfel de semnal se deosebește de unul continuu prin faptul că frecvența unui semnal sinusoidal discret nu este unic determinată, deoarece $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k)$. Această proprietate duce la fenomenul numit aliere, care pune probleme în reconstrucția semnalelor pornind de la un set de eșantioane.

Figura 2 ilustrează această situație. Punctele galbene din al doilea rând reprezintă eșantioane obținute prin eșantionare la o frecvență mai mică decât frecvența Nyquist a semnalului continuu original (albastru). Pornind de la aceste eșantioane, semnalele reprezentate cu roșu și verde reprezintă candidați valizi pentru reconstrucția semnalului inițial. Așadar, având la dispoziție doar aceste eșantioane (punctele galbene), nu putem ști care a fost semnalul în baza căruia au fost obținute.

În practică, pentru a contracara efectul de aliere, semnalele sunt de obicei filtrate înainte de a fi eșantionate, pentru a elimina frecvențele mai mari decât frecvența Nyquist. Prin urmare un filtru anti-aliere va fi un filtru trece-jos cu frecvența de tăiere egală cu frecvența Nyquist.

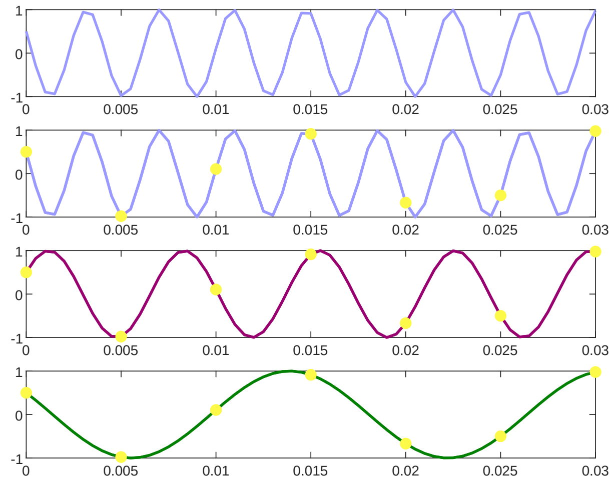

Figure 2: Fenomenul de aliere

4 Exerciții

1. La laboratorul precedent ați implementat voi Transformata Fourier Discretă. Comparați timpul de execuție al implementarii voastre cu *numpy.fft*. Desenați un grafic cu timpii de execuție pentru dimensiunile vectorilor $N \in \{128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192\}$. Folosiți biblioteca *time* pentru a calcula timpul de rulare iar la plot pentru axa Oy afișați ambii timpi pe scară logaritmică.

2. Construiți un semnal sinusoidal de frecvență aleasă de voi, de amplitudine unitară și fază nulă. Demonstrați (grafic) că eșantionarea lui cu o frecvență sub-Nyquist (aleasă, de asemenea, de voi) generează fenomenul de aliere. Pentru aceasta creați alte două semnale, de frecvențe diferite, care eșantionate cu frecvența aleasă mai sus produc aceleași eșantioane ca semnalul inițial. Obțineți, astfel, o figură similară Figurii 2.

3. Demonstrați (grafic) că alegând o frecvență de eșantionare mai mare decât frecvența Nyquist, nu mai obțineți fenomenul de aliere pentru semnalul ales la exercițiul precedent. La fel ca mai sus, indicați eșantioanele și pentru celelalte două semnale construite.

4. Frecvențele emise de un contrabas se încadrează între 40Hz și 200Hz. Care este frecvența minimă cu care trebuie eșantionat semnalul trece-bandă provenit din înregistrarea instrumentului, astfel încât semnalul discretizat să conțină toate componentele de frecvență pe care instrumentul le poate produce?

5. Înregistrați-vă în timp ce spuneți, pe rând, vocalele “a, e, i, o, u” și deschideți fișierul în Audacity pentru a putea vedea spectrograma (sau folosiți o aplicație de telefon care vă poate afișa spectrograma în timp real). Puteți distinge diferitele vocale pe baza ei?

6. Pentru vocalele înregistrate anterior desenați voi spectrograma:

   (a) citiți un semnal audio dintr-un fișier (un vector de dimensiune N);

   (b) grupați câte 1% din valorile semnalului împreuna astfel încât să fie și o suprapunere de 50% între groupuri;

   (c) pentru fiecare grup creat astfel calculați FFT;

   (d) puneți într-o matrice pe câte o coloană fiecare FFT calculat (cu valoare absolută);

   (e) afișați matricea într-o figură (similar cu Figura 1).

7. Puterea unui semnal este $P_{\text{semnal}} = 90\text{dB}$. Se cunoaște raportul semnal-zgomot, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 80\text{dB}$. Care este puterea zgomotului?

Pentru toate exercițiile salvați toate graficele afișate în format png și pdf.

Surse imagini

Figura 1: `https://en.wikipedia.org/wiki/Spectrogram#/media/File:Spectrogram-19thC.png`